Законы сохранения массы и импульса при фильтрации в пористой среде

Презентацию подготовил студент 1 курса магистратуры по специальности «Механика и энергетика»:

Молдагалиев Алибек Талгатович

Руководитель: к.ф.-м.н, доцент Туралина Д.Е.

Закон сохранения массы

- Интегральная формулировка закона сохранения массы жидкости получается из утверждения о том, что изменение массы жидкости в произвольном объеме V внутри пористой среды происходит за счет притока жидкости через границу объема Σ:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho m\, dV = -\int\limits_\Sigma \rho \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

- Здесь n — вектор внешней нормали к поверхности Σ (из-за такого выбора нормали интеграл в правой части стоит со знаком минус), а объем V неподвижен относительно пористой среды.

- Если входящие в это уравнение функции являются достаточно гладкими, то в левой части можно занести производную под знак интеграла, а правую часть преобразовать с помощью теоремы Гаусса – Остроградского:

$$\int\limits_V \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}\, dV = -\int\limits_V \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u})\, dV,$$

- откуда в силу произвольности объема V получается дифференциальная запись закона сохранения массы — *уравнение неразрывности*:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0.$$

- Если плотность жидкости постоянна, а пористая среда не деформируется (т.е. пористость зависит только от координат), то первое слагаемое обращается в ноль и уравнение неразрывности приобретает вид $div\ u = 0$.

Уравнение баланса импульса — закон Дарси

- В современных обозначениях это соотношение, называемое законом Дарси, для фильтрации в поле тяжести имеет вид:

$$0 = -\operatorname{grad} p + \rho \boldsymbol{g} - \frac{\mu}{k}\boldsymbol{u},$$

- где g — ускорение свободного падения, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости, k — коэффициент, называемый проницаемостью пористой среды, который зависит от типа пористой среды. По структуре уравнение (3.3) похоже на уравнение Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости при $\mu = const$:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \boldsymbol{g} + \mu \Delta \boldsymbol{v}$$

- При $g = 0$ закон Дарси приобретает вид: $$\boldsymbol{u} = -\frac{k}{\mu}\,\mathrm{grad}\,p;$$
- знак минус в правой части имеет ясный физический смысл: в отсутствие массовых сил жидкость движется в пористой среде из областей с бОльшим давлением в области с меньшим давлением.
- Если жидкость в порах покоится ($u = 0$), то закон Дарси превращается, как и следует, в обычное уравнение равновесия жидкости

$$0 = -\,\mathrm{grad}\,p + \rho\boldsymbol{g}.$$

Коэффициент проницаемости

- Коэффициент проницаемости *k* зависит только от свойств пористой среды (но не от свойств жидкости), и определяется, в основном, геометрией порового пространства. Он имеет размерность площади, а его величина имеет порядок квадрата характерного размера пор *d 1*).
- Для неоднородных пористых сред коэффициент проницаемости является функцией пространственных координат и может меняться с течением времени (например, при деформациях пористого скелета или за счет его засорения или растворения).

Коэффициент фильтрации

- В гидротехнической практике закон Дарси обычно используется в виде уравнения, разрешенного относительно скорости фильтрации, причем вместо давления используется *пьезометрический напор* (или просто *напор*)

$$H = H(x, y, z, t) = \frac{p}{\rho g} + z,$$

- где z — вертикальная координата рассматриваемой точки (ось Oz направлена вверх, противоположно g). Выразив скорость фильтрации, получим:

$$\boldsymbol{u} = -C \operatorname{grad} H, \quad C = \frac{k\rho g}{\mu},$$

- где C — *коэффициент фильтрации*, зависящий, очевидно, как от свойств пористой среды, так и от свойств жидкости

Закон Дарси для анизотропных сред

- При фильтрации в анизотропных пористых средах (например, в осадочных слоистых пластах или в средах с трещинами, направленными в выделенном направлении) линейная зависимость скорости фильтрации и градиента давления сохраняется (для медленных течений), однако эти векторы в случае общего положения уже не будут параллельны. Проницаемость таких сред будет характеризоваться не одним числом (коэффициентом проницаемости *k*), а симметричным положительно-определенным тензором проницаемости *kij* , входящим в закон Дарси:

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu}(\nabla^j p - \rho g^j).$$

- Презентацию подготовил студент 1 курса магистратуры по специальности «Механика и энергетика»:
- Молдагалиев Алибек Талгатович